# SESIÓN 3 - TEORÍA DE NÚMEROS

Laura García, David Ramos, Antonio Medinilla y Adrián Macías

10 de diciembre de 2021

**Problema 1** (Modificación de OJM 2009). Los números desde el 1 hasta el 2022 se escriben consecutivamente en la pizarra. En una primera pasada se borran el primer número escrito, el tercero, el quinto y así sucesivamente hasta borrar el 2021. En una segunda pasada se aplica el mismo procedimiento a los números que quedaron, borrando el primero de ellos, el tercero, el quinto y así sucesivamente. Esto se repite mientras queden números en la pizarra. ¿En qué pasada se elimina el 1728? ¿Cuál es el último número borrado y en qué pasada se elimina?

**Problema 2**. (Local OME 2007). Sean $a$, $b$, $c$, $d$ números enteros positivos que satisfacen $ab = cd$. Demostrar que $a + b + c + d$ no es un número primo.

**Problema 3**. Pruebe que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ es divisible entre 7.

**Problema 4**. Si $x, y, z$ son enteros tales que $x^2 + y^2 + z^2$ es múltiplo de 4, pruebe que $x, y, z$ son los tres pares.

**Problema 5**. Encuentra todos los enteros $x, y$ tales que $x^2 + y^2 = 2023$.

**Problema 6** (2008). Probar que para todo entero positivo $n$, $n^{19} - n^7$ es divisible por 30.

**Problema 7** (OM 2005). Un número entero se llama autodivi si es divisible entre el número de dos cifras formando por sus dos últimos dígitos (decenas y unidades). Por ejemplo: - 78013 es autodivi porque es divisible entre 13. - 8517 es autodivi porque es divisble entre 17. Halle 6 números consecutivos que sean autodivi y que tengan las cifras de las unidades, de las decenas y de las centenas distintas de cero.

**Problema 8** (China 2001). Dados tres enteros $a, b, c$ tales que $a, b, c, a+b-c, a+c-b, b+c-a, a+b+c$ son siete números primos distintos. Sea $d$ la diferencia entre el mayor y el menor de estos números primos. Suponga que 800 es un elemento del conjunto $\{a+b, b+c, c+a\}$. Determine el máximo valor posible de $d$.

**Problema 9** (2013). Hallar todas las soluciones enteras $(x, y)$ de la ecuación $y^k = x^2 + x$ donde $k$ es un número entero mayor que 1.

**Problema 10** (San Petersburgo 2001). Para todos los enteros positivos $m > n$, probar que:
$mcm\{m, n\} + mcm\{m+1, n+1\} > \frac{2mn}{\sqrt{m-n}}$

**Problema 11** (OMCC 2009/6). Encuentre todos los números primos $p$ y $q$ tales que $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

**Problema 12** (Local OME 2007). Encontrar todas las soluciones enteras posibles, $x$ e $y$, de la ecuación $p(x+y) = xy$.

**Problema 13** Demostrar que existen infinitos números primos.

**Problema 14** Encontrar el mayor número de cifras $a_1, ..., a_n$ tal que todos los números de cifras $a_i, ..., a_j$ con $i \leq j$ son primos.

**Bibliografía** - 104 Number Theory Problems: From the Training of the USA IMO Team - Titu Andreescu, Dorin Andrica, Zuming Feng.
- Olimpiada Matemática Española: http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es /csanchez/olimmain.html
- Institucional US: http://institucional.us.es/olimpiada2006/
- Art of Problem Solving: https://artofproblemsolving.com/